Paradoxes

Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

* UMR CNRS 9189,
Bât. M3 extension

Par **Jean-Paul DELAHAYE**
Professeur émérite à l'Université de Lille, Sciences et Technologies,
Chercheur au Centre de recherche en informatique signal et automatique de Lille *

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une solution au paradoxe proposé, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture ou à l'adresse électronique delahaye@univ-lille1.fr).

LE PARADOXE PRÉCÉDENT : LE PARADOXE DE LEONID LEVIN

Si on vous propose simultanément plusieurs paris qui, chacun, pris individuellement, vous est favorable, cela constitue un nouveau pari (qu'on peut appeler *le pari groupé*) qui vous est toujours favorable. C'est la *loi des paris groupés.*

Le mathématicien Leonid Levin, célèbre pour de nombreux travaux réalisés en théorie de la complexité, a trouvé une situation qui contredit la *loi des paris groupés*. Les nombres décimaux sont ceux qui s'écrivent de manière finie en base 10, comme 0,132 ; -3,3211 ; 0,00012 ; -219,9 ; 75,54321 ; etc. Nous noterons **D** l'ensemble des nombres décimaux (positifs ou négatifs). L'ensemble des nombres réels **R** (cette fois, les développements décimaux peuvent être finis ou infinis) peut être divisé en *classes décimales* : on constitue des paquets de nombres réels en mettant ensemble ceux dont la différence est un nombre décimal.

Par exemple, on regroupe ensemble :
π ; π + 0,132 ; π - 3,3211 ; etc.
Dans une autre classe, on mettra
$\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ + 0,132 ; $\sqrt{2}$ - 3,3211 ; etc.

Il y a une infinité de classes décimales. Tout nombre réel appartient à une classe décimale et à une seule. Par commodité, on choisit un *chef* dans chaque classe décimale. Ce chef (ou représentant de la classe) permet de donner un nom à la classe. La classe dont le chef est π sera notée Classe(π) ; par définition Classe(π) est la classe de tous les nombres réels de la forme $\pi + d$ où d est un nombre décimal.

Puisqu'il y a une infinité de classes, il y a une infinité de chefs de classe. On note **C** l'ensemble de tous les chefs de classe. Les deux ensembles **C** et **D** ont la propriété intéressante suivante qui résulte de leur définition : tout nombre réel x s'écrit de manière unique $c + d$ avec c dans **C** et d dans **D** (c est le chef de la classe à laquelle appartient x, et d est le nombre décimal $x - c$).

Considérons le pari suivant :
- On choisit un nombre réel x au hasard uniformément entre 0 et 1. Pour cela, on choisit un point quelconque sur un segment de longueur 1 et on mesure sa distance à une extrémité choisie comme origine, ou, ce qui revient au même, on lance un dé à 10 faces indéfiniment et on note tous les chiffres obtenus qui déterminent un nombre réel unique, comme 0,27182818284590...
- Le nombre tiré x s'écrit sous la forme $c + d$ avec c un chef et d un décimal ;
- Si le nombre choisi est de la forme c + 0,7, vous gagnez 2 euros ;
- Si le nombre choisi est de la forme c + 0,9, vous perdez 1 euro ;
- Sinon, personne n'a gagné, personne n'a perdu.

Un tel pari vous est favorable car vous gagnerez aussi souvent que vous perdrez, mais, lorsque vous gagnerez, vous gagnerez deux fois plus que lorsque vous perdrez.

Plus généralement, soient d et d' deux nombres décimaux quelconques, on considère le pari suivant que nous noterons Pari(d ; d') :
- On choisit un nombre réel x au hasard entre 0 et 1. On détermine sa classe c ;
- Si le nombre choisi est de la forme $c + d$, vous gagnez 2 euros ;
- Si le nombre choisi est de la forme $c + d'$, vous perdez 1 euro ;
- Sinon, personne n'a gagné, personne n'a perdu.

Si on vous propose le pari Pari(d ; d'), vous devez l'accepter car le nombre x choisi a autant de chances d'être de la forme $c + d$ que de la forme $c + d'$. Comme précédemment, le pari vous est favorable car vous gagnez plus que vous ne risquez.

On vous propose maintenant un pari groupé, composé de paris du type précédent. Précisément, on vous propose le pari Pari(0,235 ; 0,35) en même temps que le pari Pari(0,78432 ; 0,8432) et tous les paris de la forme Pari(d ; d') où d' est obtenu en supprimant le premier chiffre après la virgule de d. Puisque ce pari regroupe des paris favorables, vous brûlez d'envie de l'accepter. Pourtant, si vous acceptez ce pari groupé, vous allez vous en mordre les doigts car, très étrangement, il vous est fortement défavorable.

En effet : supposons que le nombre réel tiré x soit de la forme π + 0,321. Faisons le bilan des paris gagnés et perdus :
- vous avez gagné le pari Pari(0,321 ; 0,21), ce qui vous rapporte 2 euros ;
- vous avez perdu le pari Pari(0,0321 ; 0,321), ce qui vous coûte 1 euro ;

- vous avez perdu le pari Pari(0,1321 ; 0,321), ce qui vous coûte 1 euro ;
- de même pour tous les paris : Pari(0,2321 ; 0,321), Pari(0,3321 ; 0,321), Pari(0,4321 ; 0,321), Pari(0,5321 ; 0,321), Pari(0,6321 ; 0,321), Pari(0,7321 ; 0,321), Pari(0,8321 ; 0,321), Pari(0,9321 ; 0,321).

Au total, vous avez perdu 10 paris (donc 10 euros) et vous avez gagné 2 euros. Bilan : le pari groupé vous coûte 8 euros. Bien sûr, quel que soit le nombre x choisi, la situation est semblable et vous perdez donc à chaque fois 8 euros. Dans le cas très particulier où le nombre choisi au hasard est 0, vous ne gagnez même pas 2 euros et perdez donc 10 euros d'un coup.

Est-il possible qu'un pari groupé de paris favorables soit défavorable ?

Solution

Merci à Léo Gervile-Réache et Jef Van Staeyen qui m'ont envoyé leur analyse de ce paradoxe plus difficile que les précédents.

La réponse semble être oui : dans les cas où on considère une infinité de paris favorables, les regrouper peut les transformer en un pari défavorable !

Je ne connais aucune explication totalement satisfaisante de ce paradoxe de Levin. Je vais fournir plusieurs pistes avec, à chaque fois, une critique.

(a) Première possibilité d'explication : l'axiome du choix
Il faut remarquer que nous utilisons l'axiome du choix (voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome_du_choix). Lorsque nous disons que nous pouvons prendre un « chef » dans chaque classe, nous sommes en effet en train de retenir un élément dans chaque classe et de les regrouper en un tout que nous utilisons ensuite dans le raisonnement. Cet axiome indique que si on dispose d'un ensemble d'ensembles non vides (ici les classes décimales), il est possible de prendre un élément de chaque ensemble et de les regrouper pour faire un nouvel ensemble (c'est de cette façon que nous avons constitué C). On sait que l'axiome du choix engendre des situations paradoxales, et ce qui se passe ici ne serait qu'un exemple nouveau de ces situations paradoxales provoquées par l'axiome du choix.

Critique : l'axiome du choix engendre des situations choquantes pour l'intuition, mais jamais de vraies contradictions. Ici, il est tellement absurde qu'un groupement de paris favorables devienne défavorable qu'on a presque affaire à une incohérence. Notons aussi qu'habituellement l'axiome du choix est accepté. Doit-on décider de ne plus l'utiliser dès qu'on calcule des probabilités ?

(b) Deuxième possibilité d'explication : la loi des paris groupés
La règle qu'un pari groupé composé de paris favorables est favorable n'est peut-être pas vraie en général. Elle est facile à démontrer dans le cas d'un nombre fini de paris, mais je n'en connais pas de démonstration dans le cas d'un nombre infini de paris. Notre intuition nous souffle cette loi, mais elle se trompe peut-être comme cela arrive.

Critique : dans le cas infini, la situation reste parfaitement claire, on ne voit pas ce qui peut en empêcher la démonstration.

(c) Troisième possibilité d'explication : les probabilités continues
Dans le pari considéré, on tire un nombre réel au hasard, or cela n'a pas de sens concret et d'ailleurs, dans la réalité, on ne pourrait pas mettre en œuvre le pari comme c'est suggéré en prenant un point au hasard sur une droite ou en lançant une infinité de fois un dé à dix faces.
Critique : en théorie des probabilités, on considère sans arrêt des situations analogues et la théorie de la mesure donne un sens précis à l'idée d'un nombre réel tiré au hasard entre 0 et 1. Si ce type de tirages continus n'a pas de sens, pourquoi tant de livres s'y consacrent ? Et si cela a un sens de tirer un nombre réel au hasard uniformément entre 0 et 1, et que c'est concrètement utile dans de nombreuses applications, pourquoi ici cela n'en aurait-il pas ?

Le paradoxe de Levin n'est pas une simple astuce comme de nombreux paradoxes de cette rubrique. Aucune solution totalement claire ne semble se présenter à l'esprit. C'est peut-être bien un vrai paradoxe !

NOUVEAU PARADOXE : S'APPROCHER DU BUT

Voici un petit problème paradoxal qui m'a été proposé par Aurélien Géron.

Vous êtes placé en un point O et, à une distance d'une unité, il y a un point I. Vous devez vous rendre le plus près possible d'un point X sur le segment de droite OI (par exemple, à moins d'un millième d'unité de X), mais vous ne pouvez vous déplacer que par sauts successifs selon la règle simple suivante :

- Vous choisissez le point O ou le point I, et votre saut vous conduit alors au point situé au milieu, entre le point P où vous êtes et le point choisi.

Si, par exemple, vous partez de O et choisissez la séquence I, O, I, I, cela vous mène respectivement aux positions 0,5 – 0,25 – 0,625 – 0,8125.

Fixons maintenant un objectif X à atteindre à moins d'un millième (ou un millionième, etc.). Par exemple, X situé à 1/Pi de O. Quelle est la plus courte séquence de choix O ou I qui permet de réussir ?

Attention – et c'est là le côté paradoxal du problème – appliquer le principe naturel « si je suis entre O et X, je vais vers I, si je suis entre X et I, je vais vers O » ne marche pas du tout. Voici un exemple qui le prouve. Prenons l'objectif X = 0,6 et appliquons la méthode « si je suis entre O et X, je vais vers I, si je suis entre X et I, je vais vers O ». Rapidement, on oscille entre 1/3 et 2/3. Les points obtenus sont en effet (on mesure leur distance à O) : 0,5 – 0,75 – 0,375 – 0,6875 – 0,34375 – 0,671875 – 0,3359375 – 0,66796875 – 0,333984375 – 0,6669921875 – 0,33349609375 – 0,666748046875 – 0,333374023438 – 0,666687011719 – ... ■