Paradoxes

Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

* UMR CNRS 8022,
Bât. M3 extension

Par **Jean-Paul DELAHAYE**
Professeur émérite à l'Université de Lille - Sciences et Technologies,
Chercheur au Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille *

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une solution au paradoxe proposé, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

LE PARADOXE PRÉCÉDENT : RÉDUCTION

Jacques a gagné un bon de réduction qui lui donne droit à 22 % sur tous les articles du magasin de téléphone où il se rend pour acheter un nouvel appareil. Aujourd'hui, c'est l'anniversaire du magasin et celui-ci offre une réduction de 9 % sur tous les téléphones. La réduction est cumulable avec les autres réductions dont peuvent bénéficier les clients. Le magasin donne le choix de l'ordre dans lequel appliquer les réductions. Jacques peut donc demander d'abord une réduction de 22 %, puis une réduction de 9 %, ou procéder dans l'ordre inverse : demander d'abord 9 %, puis 22 %. Son vieux téléphone est en panne, il ne peut donc pas faire le calcul et doit raisonner de tête. Il hésite car deux arguments se présentent à son esprit : (A) Si je profite d'abord des 22 %, je profite des 22 % sur un prix plus élevé qu'en demandant les 22 % en second, donc il faut commencer par les 22 %. (B) Il faut commencer par les 9 %. Cela résulte du principe général suivant : lorsqu'on doit opérer une série de réductions, pour en profiter au mieux, il faut opérer les réductions par ordre croissant (car cela fait baisser le prix plus lentement et donc, en moyenne, les baisses s'appliquent à des sommes plus élevées et sont plus intéressantes). Voilà qui est paradoxal, se dit-il ! Sans faire le calcul (ce serait trop facile !), aidez-le. Existe-t-il un principe général qui permet de profiter au mieux d'une série de réductions sans avoir à faire de calcul ?

Solution

Merci aux lecteurs qui m'ont fait parvenir la bonne solution et qui sont dans l'ordre : Jef Van Staeyen, Hervé Moritz, Jean-François Colin, Sureya Abdou, Pierre Boulet et Jean-Pierre Bondue.

Ce paradoxe est classique : l'ordre n'a pas d'importance, car opérer une réduction de x % revient à multiplier le prix P par (1- x/100). Opérer une réduction de x % puis de y % revient donc à multiplier le prix par (1 - x/100) puis le résultat par (1- y/100). Puisque la multiplication est commutative, cela revient au même que de multiplier par (1 - y/100) puis par (1 - x/100), c'est-à-dire d'opérer les réductions en commençant par y %. Bien sûr, le résultat est général : quand on a plusieurs réductions à appliquer consécutivement, leur ordre est sans importance, quel qu'en soit le nombre.

NOUVEAU PARADOXE : LE PARADOXE DE LEONID LEVIN

Voici un extraordinaire paradoxe concernant les paris. Pour bien en saisir la portée, commençons par réfléchir à la notion de « pari groupé ».

On joue avec un dé à six faces non truqué. On envisage les deux paris suivants qui vous sont tous les deux favorables :
- Pari 1 : si c'est '6', tu gagnes 2 euros ; si c'est '1', tu perds 1 euro, sinon rien.
- Pari 2 : si c'est '5', tu gagnes 2 euros ; si c'est '2', tu perds 1 euro, sinon rien.

En acceptant les deux paris simultanément, vous gagnerez en moyenne deux fois plus que vous ne perdrez (car c'est le cas pour chaque pari), ce sera donc toujours un pari favorable pour vous.

D'une manière générale, il est clair que si on vous propose simultanément plusieurs paris qui, chacun, pris individuellement, vous est favorable, cela constitue un nouveau pari (qu'on peut appeler *le pari groupé*) qui vous est toujours favorable. En bref, on a ce qu'on pourrait appeler la *loi des paris groupés* :
- *un pari groupé de paris favorables est un pari favorable.*

On peut même être plus précis et remarquer que le gain moyen (ou espérance) d'un pari groupé est la somme des gains moyens de chaque pari. Ici, le gain moyen pour chaque pari est de 1/6 (une fois sur six, on gagne 2 euros ; une fois sur 6, on perd 1 euro, donc, sur 6 coups, on gagne en moyenne 1 euro, ce qui donne un gain moyen par pari de 1/6 d'euro). Le gain moyen pour le pari groupé est de 2/6 d'euro soit un tiers d'euro.

Le mathématicien Leonid Levin, célèbre pour de nombreux travaux réalisés en théorie de la complexité, a trouvé une situation qui contredit la *loi des paris groupés*. Décrire la situation va être un peu compliqué, mais le jeu en vaut la chandelle, car on a affaire à un paradoxe extrêmement fort. Tout le monde connaît les nombres décimaux qui sont ceux qui s'écrivent de manière finie en base 10, comme 0,132 ; -3,3211 ; 0,00012 ; -219,9 ; 75,54321 ; etc. Nous noterons **D** l'ensemble de tous les nombres décimaux (positifs ou négatifs).

L'ensemble des nombres réels **R** (cette fois, les développements décimaux peuvent être finis ou infinis) peut être séparé en *classes décimales* : on constitue des paquets de nombres réels en mettant ensemble ceux dont la différence est un nombre décimal.
Par exemple, on regroupe ensemble : π ; $\pi + 0{,}132$; $\pi - 3{,}3211$; etc.
Dans une autre classe, on mettra $\sqrt{2}$; $\sqrt{2} + 0{,}132$; $\sqrt{2} - 3{,}3211$; etc.

Il y a une infinité de classes décimales (l'argument mathématique est : sinon l'ensemble des nombres réels serait dénombrable, ce qui n'est pas le cas).

Tout nombre réel appartient à une classe décimale et à une seule. Par commodité, on choisit un *chef* dans chaque classe décimale, ce chef (ou représentant de la classe) permet de donner un nom à la classe. La classe dont le chef est π sera notée Classe(π), par définition Classe(π) est la classe de tous les nombres réels de la forme $\pi + d$ où d est un nombre décimal.

Puisqu'il y a une infinité de classes, il y a une infinité de chefs de classe. On note **C** l'ensemble de tous les chefs de classe. Les deux ensembles **C** et **D** ont la propriété intéressante suivante, qui résulte de leur définition : tout nombre réel x s'écrit de manière unique $c + d$ avec c dans **C** et d dans **D** (c est le chef de la classe à laquelle appartient x, et d est le nombre décimal $c - x$).

Considérons maintenant le pari suivant :
- On choisit un nombre réel x au hasard uniformément entre 0 et 1. Pour cela, on choisit un point quelconque sur un segment de longueur 1 et on mesure sa distance à une extrémité choisie comme origine ou, ce qui revient au même, on lance un dé à 10 faces indéfiniment et on note tous les chiffres obtenus qui déterminent un nombre réel unique, comme 0,27182818284590….
- Le nombre tiré x s'écrit sous la forme $c + d$ avec c un chef et d un décimal ;
- Si le nombre choisi est de la forme $c + 0{,}7$, vous gagnez 2 euros ;
- Si le nombre choisi est de la forme $c + 0{,}9$, vous perdez 1 euro ;
- Sinon, personne n'a gagné, personne n'a perdu.

Un tel pari vous est favorable car vous gagnerez aussi souvent que vous perdrez, mais lorsque vous gagnerez, vous gagnerez deux fois plus que lorsque vous perdrez (c'est comme tout à l'heure avec le dé à six faces).

Plus généralement, soient d et d' deux nombres décimaux quelconques, on considère le pari suivant que nous noterons Pari(d ; d') :
- On choisit un nombre réel x au hasard entre 0 et 1. On détermine sa classe c ;
- Si le nombre choisi est de la forme $c + d$, vous gagnez 2 euros ;
- Si le nombre choisi est de la forme $c + d'$, vous perdez 1 euro ;
- Sinon, personne n'a gagné, personne n'a perdu.

Si on vous propose le pari Pari(d ; d'), vous devez l'accepter car le nombre x choisi a autant de chance d'être de la forme $c + d$ que de la forme $c + d'$. Comme précédemment, le pari vous est favorable car vous gagnez plus que vous ne risquez.

On peut détailler l'argument indiquant que x a autant de chance d'être de la forme $c + d$ que de la forme $c + d'$. Si on représente sur un cercle de périmètre 1, muni d'une origine, l'ensemble des cas qui vous sont favorables (tous les nombres réels entre 0 et 1 de la forme $c + d$ avec c un chef), et qu'on fait tourner cet ensemble de $d' - d$, on obtient exactement l'ensemble des cas qui vous sont défavorables (les nombres de la forme $c + d'$). L'ensemble des cas défavorables s'obtenant par rotation de l'ensemble des cas favorables, en choisissant un point au hasard sur le cercle, on a bien autant de chances de tomber sur un cas favorable que sur un cas défavorable. Comme les cas favorables rapportent le double de ce que coûtent les cas défavorables, il faut accepter le pari.

On vous propose maintenant un pari groupé, composé de paris du type précédent. Précisément, on vous propose le pari Pari(0,235 ; 0,35) en même temps que le pari Pari(0,78432 ; 0,8432) et tous les paris de la forme Pari(d ; d') où d' est obtenu en supprimant le premier chiffre après la virgule de d. Puisque ce pari regroupe des paris favorables, vous brûlez d'envie de l'accepter. Pourtant, si vous acceptez ce pari groupé, vous allez vous en mordre les doigts car, très étrangement, il vous est fortement défavorable.

En effet : supposons que le nombre réel tiré x soit de la forme $\pi + 0{,}321$. Faisons le bilan des paris gagnés et perdus :
- vous avez gagné le pari Pari(0,321 ; 0,21), ce qui vous rapporte 2 euros ;
- vous avez perdu le pari Pari(0,0321 ; 0,321), ce qui vous coûte 1 euro ;
- vous avez perdu le pari Pari(0,1321 ; 0,321), ce qui vous coûte 1 euro ;
- de même pour tous les paris : Pari(0,2321 ; 0,321), Pari(0,3321 ; 0,321), Pari(0,4321 ; 0,321), Pari(0,5321 ; 0,321), Pari(0,6321 ; 0,321), Pari(0,7321 ; 0,321), Pari(0,8321 ; 0,321), Pari(0,9321 ; 0,321).

Au total, vous avez perdu 10 paris (donc 10 euros) et vous avez gagné 2 euros. Bilan : le pari groupé vous coûte 8 euros. Bien sûr, quel que soit le nombre x choisi, la situation est semblable et vous perdez donc à chaque fois 8 euros. Dans le cas très particulier où le nombre choisi au hasard est 0, la situation est différente : vous ne gagnez même pas 2 euros et perdez donc 10 euros d'un coup.
Est-il vraiment possible qu'un pari groupé de paris favorables soit défavorable ?