Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

* UMR CNRS 9189,
Bât. M3 extension

Par
Professeur émérite à l'Université de Lille – sciences et technologies,
Chercheur au Laboratoire CRISTAL *

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une solution au paradoxe proposé, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture ou à l'adresse électronique jean-paul.delahaye@univ-lille1.fr).

Uniquement de tête, donc sans utiliser ni ordinateur, ni crayon, ni papier… ni smartphone, trouvez le 200-ième chiffre décimal après la virgule du nombre :

$$(1 + \sqrt{2})^{1000}.$$

Oui, c'est possible !

Solution

$(1 + \sqrt{2})^{1000} + (1 - \sqrt{2})^{1000}$ est un entier car, quand on développe, tous les termes comportant $\sqrt{2}$ s'annulent comme cela se passe pour :

$(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2 = (1 + 2\sqrt{2} + 2) + (1 - 2\sqrt{2} + 2) = 6$

Or $(1 - \sqrt{2})^{1000}$ est très petit puisque c'est un nombre inférieur à 1/2 élevé à la puissance 1000. Précisément, en utilisant que $2^{10} = 1024$, on voit qu'il est inférieur à :

$1/2^{1000} = 1/1024^{100} < 1/(10^3)^{100} = 1/10^{300}$.

Le nombre de l'énoncé est donc la différence entre un entier et un nombre plus petit que 0,000… 0001 avec 300 zéros. Tous les chiffres entre la virgule et le 300ème chiffre après la virgule sont donc des '9'.

Ce problème provient d'une rubrique de problèmes de Elwyn Berlekamp et Joe Buhler, parue dans le numéro d'automne 1999 du journal *Emissary* qui est le journal du MRS (Mathematical Research Institute) de Berkeley au États-Unis.

Une famille de 50 scarabées se trouve sur une grande tige étroite en bois en position horizontale, dont la longueur est de 30 mètres exactement. Ils sont placés au hasard sur la règle, chacun tourné vers la droite ou vers la gauche, au hasard. Chaque scarabée avance d'un centimètre par seconde. Quand deux scarabées se rencontrent, ils font tous les deux demi-tour. On imagine que le demi-tour est instantané et que les scarabées ont une longueur négligeable. Quand un scarabée arrive à un bout de la tige, il tombe par terre.

Sans connaître aucune donnée plus précise – c'est là le miracle et le paradoxe –, on peut être certain que tous les scarabées seront par terre en moins d'une heure, et que c'est encore vrai si, au lieu de 50 scarabées, il y en a 100, 500 ou 1000. Pourquoi ?