Des formes cristallines à la symétrie comme outil de raisonnement

Par **Bernard MAITTE**
Professeur émérite à l'Université de Lille – sciences et technologies

Répondant de Jean-Marc Lévy-Leblond lors de la conférence du 24 octobre (cf. p. 32)

Dans la conférence inaugurale du cycle « Génèse des formes », Jean-Marc Lévy-Leblond interrogera l'histoire et la signification du passage, en physique, de l'étude des formes géométriques – trajectoires des corps mobiles, célestes en particulier (droites, cercles, ellipses, etc.), structures des objets matériels (polyèdres platoniciens, cristaux, etc.) – à des notions moins visuelles et de plus en plus conceptuelles permettant d'approfondir notre compréhension. Le présent article développe ce passage sur l'exemple de la cristallographie.

Des formes des cristaux à la loi de symétrie [1]

1609, Johann Kepler sélectionne une des nombreuses propriétés physiques de la neige, la régularité des flocons (ils dessinent toujours une étoile rigoureusement hexagonale, plus ou moins achevée) et en rend compte, entre autres, par l'empilement régulier de petites sphères de même dimension [2]. Plus de cinquante ans plus tard, Robert Hooke décrit dans sa *Micrographia* [3] la cristallisation de sulfates observée au microscope : il explique la régularité des faces en conjecturant que ces cristaux résultent de l'empilement, dans les trois directions de l'espace, de petites masses sphériques. Christiaan Huygens (1690) va plus loin [4] : il justifie à la fois les faces naturelles, les clivages et la biréfringence de la calcite (elle dédouble les images sur lesquelles elle est posée de manière reliée exactement avec la géométrie des formes) en inférant que ces propriétés sont dues à l'empilement rhomboédrique de petites masses analogues à des ellipsoïdes de révolution. Il étend au quartz et au mica ses déductions faisant dépendre les propriétés physiques des cristaux de leur structure. Isaac Newton (1702) rejette les explications de Huygens au nom de l'inexactitude des mesures que celui-ci, mort en 1695, a effectuées. Fin de l'épisode : personne ne met en cause les affirmations de Newton.

Au XVIIIème siècle, l'étude des cristallisations reprend par d'autres voies : de nombreux naturalistes possèdent un « cabinet de curiosités » ; ils y exposent les merveilles de la Création, et, parmi elles, les cristaux. Mais comment les présenter ? Comment classer ? Certains les regroupent par utilisations, d'autres par gisements ou par compositions chimiques, par couleurs… Des catalogues sont dressés, des livres édités. L'un des grands experts de la reconnaissance des minéraux est Romé de l'Isle. Comme beaucoup de naturalistes, il admire Linné : celui-ci vient de construire une classification des végétaux sur la remarque que leurs étamines et pistils possèdent nombre et symétrie propres. Voulant suivre Linné, Romé de l'Isle privilégie, parmi toutes leurs propriétés, les formes des cristaux et les représente dans son *Essai de cristallographie* [5] (1772) avec leurs faces idéalisées, également développées. En 1783, il étend dans sa *Cristallographie* le nombre de ses descriptions et, afin que les planches soient les plus exactes possibles, réalise à l'intention du graveur des formes en bois. Pour cela, il s'adjoint les services d'un mécanicien, Carrangeot, qui mesure l'angle des faces au moyen d'un goniomètre rudimentaire. À leur grande surprise, Romé et lui constatent que, quel que soit le développement des faces, la même espèce minérale présente toujours les mêmes angles dièdres [6]. C'est la *première loi de la cristallographie*, que Romé publie et dont il rend compte en inférant que les minéraux sont formés par l'assemblage tridimensionnel de parallélépipèdes, les *molécules intégrantes*, qui emplissent l'espace et sont au nombre de 7 types. Romé montre que les formes cristallines observées peuvent se déduire géométriquement de ces molécules intégrantes, par *troncatures* sur les sommets ou sur les arêtes.

À la même époque, René-Just Haüy se lance, à son tour, dans l'étude des cristaux, découvre tardivement les écrits de Romé, adopte ses hypothèses de molécules intégrantes et de troncatures. Mais il va beaucoup plus loin : il lie toutes les propriétés physiques observées des cristaux à leurs formes. En 1815 [7], il propose d'expliquer toutes celles observées sur les cristaux connus au moyen d'une seule *loi de symétrie.* Pourtant, en 1822, Haüy constate que certains cristaux n'obéissent pas à sa loi [8] : ils peuvent avoir une forme tétraé-

[1] Bernard Maitte, « Histoire de la construction des groupes de symétrie », *Les Nouvelles d'Archimède*, n° 48, 2010, p. 20-22.

[2] Johann Kepler, *L'étrenne ou la neige sexangulaire*, trad. crit. de Robert Halleux, Paris, éd. Vrin, 1979.

[3] Robert Hooke, *Micrographia…*, Londres, Royal Society, 1665.

[4] Christiaan Huygens, *Traité de la lumière…*, Leyde, Pierre Vander Aa, 1690.

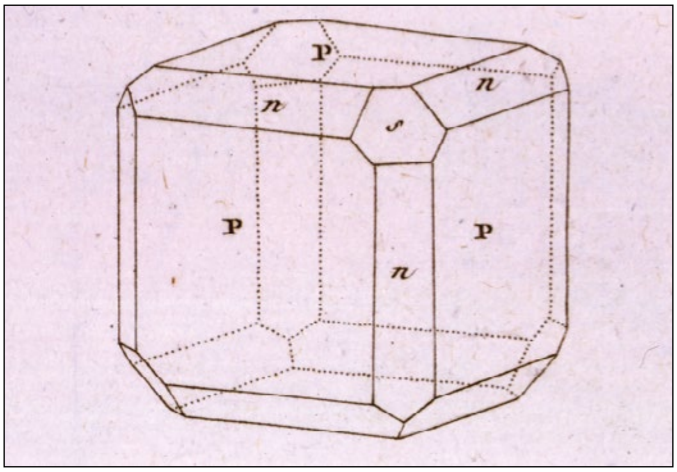
[5] Jean-Baptiste Romé de l'Isle, *Essai de Cristallographie…*, Paris, Didot jeune, 1772.

[6] J.B. Romé de l'Isle, *Cristallographie…*, Paris, 1783.

[7] R.J. Haüy, *Mém. Mus. Hist. nat.*, I, 1815, p. 81-101.

[8] R.J. Haüy, *Traité de cristallographie,* Paris, 1822.

drique, obtenue par troncature d'un sommet d'un cube sur deux et non de tous les sommets (cf. figure ci-dessous). Il considère comme « merveilleuses exceptions » ces cas d'*hémiédrie*.



René-Just Haüy : un tétraèdre s'obtient par troncatures d'un sommet sur deux d'un cube (Faces s). *Traité de cristallographie,* 1815.

L'étude des exceptions à la loi de symétrie amène les concepts de réseaux cristallins, de classes puis de groupes de symétrie

Considérer comme exceptions des propriétés observées dans la nature est faire peu de cas de l'universalité d'une loi. Un élève d'Haüy, Gabriel Delafosse, souligne (1840) que son maître s'est montré trop géomètre, pas assez physicien [9]. Il propose de considérer que, dans un cristal, les molécules ne remplissent pas l'espace. Grâce à cette conjecture, il peut expliquer les hémiédries en considérant, par exemple, que des molécules tétraédriques se répètent selon un *réseau* cubique. Plus généralement, il définit les translations et les caractéristiques de réseaux tridimensionnels. Auguste Bravais (1848) systématise cette étude et dénombre 14 *modes de réseaux* se répartissant dans les sept systèmes d'Haüy [10].

Au début du XIX[ème] siècle, les cristallographes allemands se placent dans une autre perspective. Adeptes de la *Naturphilosophie*, ils nient l'existence d'atomes et de molécules, considèrent que la matière est divisible à l'infini, siège de forces attractives et répulsives qui se combattent. À la suite de Christian Samuel Weiss (1804) [11], ils expliquent les hémiédries en introduisant le concept d'*axes de symétries*. Un carré est, par exemple, laissé invariant par toutes les rotations autour de son centre dont l'angle est un multiple de 90° : perpendiculairement au carré et par son centre passe un axe qui fait tourner de 360°/4, un axe dit *d'ordre 4*. Dans un tétraèdre, toutes les faces sont homologues par rapport à trois axes d'ordre 2 concourants, perpendiculaires entre eux et passant par les centres des faces. Weiss veut dénombrer tous les éléments de symétrie compatibles avec les cristaux, les combine les uns aux autres, appelle ces combinaisons possibles des *classes de symétrie.* Son travail est mené à son terme par Johann Friedrich Hessel (1830) [12], qui démontre que les cristaux ne peuvent admettre que 32 classes possibles réparties dans les 6 (7) systèmes d'Haüy.

En 1879, Leonhard Sohncke va plus loin : il définit comme *groupe de symétrie* les opérations qui laissent un objet inchangé [13]. Cette définition plus générale lui permet de combiner les translations et les réseaux utilisés par les Français avec les rotations et les classes introduites par les Allemands. Sohncke ne parvient pas à faire le dénombrement complet des groupes compatibles avec les cristaux. C'est le mathématicien Eugraph Fedorov (1885) [14], suivi, indépendamment, de Arthur Schönflies (1891) [15] qui, sans figure, dénombre 230 groupes de symétrie s'inscrivant dans les classes, réseaux, systèmes définis précédemment.

À la même époque, suivant la voie tracée par Évariste Galois (1830), le mathématicien Félix Klein lance (1873) le « programme d'Erlangen », qui donne un cadre général aux diverses géométries concevables (euclidienne, projective, sphérique…) en les ramenant au groupe de symétrie fondamental qui les sous-tend. La force de cette notion de groupe

9 Gabriel Delafosse, « Recherches relatives à la cristallisation… », in *Recueils de rapports sur les progrès des lettres et des sciences en France,* Paris, Imp. impériale, 1867, 3-23.

10 Auguste Bravais, « Les polyèdres symétriques de la géométrie », *Journal de mathématiques,* t. XIV, 1848.

11 Christian Samuel Weiss, « Dynamische Ansicht de Krystallisation », in R.J. Haüy, *Lehrbuch des Mineralogie,* Leipzig, 1804-1810, p. 365-389.

12 Johann Friedrich Hessel, *Kristallometrie oder Kristallonormie…,* Leipzig, H.W. Brandes ed., vol. 8, 1897.

13 Leonard Sohncke, *Entwickelung einerTheorie des Krystallstruktur,* Leipzig, B.G. Teubner, 1879.

14 Eugraph Fedorov, « Elementer der Lehre von den Figuren », *Verh. Kaisertl. Russ. Mineralo.,* St Petersburg, 2 Ser., 21, 1, 1885.

15 Arthur Schönflies, *Krystallsysteme und Krystallstucktur*, Leipzig, 1891.

vient de ce qu'elle transfère les idées de translations et de symétries des objets (un flocon de neige, un prisme de quartz, un hexagone) aux opérations (rotation de 60° pour laisser l'objet inchangé) : elle leur confère ainsi un caractère plus abstrait et plus général.

Les principes de Neumann et de Curie

En sciences physiques et naturelles, de Kepler à Sohncke, l'étude et la classification des formes a toujours été menée de pair avec celle des autres propriétés physiques et chimiques des cristaux. Toutes ces études permettent à Franz Neumann de proposer, en 1833, son « Principe de symétrie » [16] : « *Les éléments de symétrie de toute propriété physique d'un cristal doivent inclure les éléments du groupe à centre* [17] *de ce cristal* ». Ceci signifie que la propriété physique observée doit avoir au moins la symétrie du cristal. Dès lors, on peut rechercher les symétries *possibles* de celui-ci à partir des propriétés physiques mesurées, quand les formes extérieures sont absentes ou, encore, rechercher les conditions nécessaires (mais non suffisantes) à l'apparition d'une propriété.

En 1880, Pierre et Jacques Curie reprennent les études effectuées près d'un siècle plus tôt par Haüy sur la pyroélectricité de la tourmaline [18] et découvrent qu'en comprimant un cristal pyroélectrique selon un axe d'hémiédrie, des charges électriques opposées apparaissent aux deux extrémités et réciproquement. Ils nomment *piézoélectricité* ce phénomène et dénombrent 20 classes de symétrie sur les 32 qui peuvent être piézoélectriques, mais ne le sont pas forcément. Pierre Curie se lance seul dans l'étude des raisons pour lesquelles cette propriété peut, ou non, se manifester. En 1894, il arrive à ses fins en renversant le problème : il n'étudie plus les propriétés physiques que manifestent les corps, mais la symétrie des phénomènes physiques eux-mêmes. Il démontre que c'est « *la dissymétrie qui crée le phénomène* » [19]. Ce qui est maintenant connu comme le « *Principe de Curie* » marque une profonde rupture : la symétrie perd sa forme, ne s'applique plus à l'étude des formes, mais devient outil de raisonnement, un peu comme, chez Archimède, la balance permet la naissance d'un raisonnement dans lequel la forme s'est ensuite inscrite mentalement et produit des idées.

Vers de nouveaux horizons [20]

L'intérêt essentiel des groupes tient au fait que leur structure mathématique est à la fois assez simple et assez contraignante pour que l'on puisse les étudier et les classer avec précision. Une telle classification permet de connaître par avance les symétries possibles des objets physiques, indépendamment de leurs formes spécifiques détaillées. C'est, nous venons de le voir, la construction collective de cette notion de groupes au cours d'une histoire de trois siècles marquée par la fécondation des diverses voies empruntées, qui a amené les premiers succès de cette démarche en physique. La suite de l'histoire peut être esquissée. En 1905, Albert Einstein étend cette approche à l'espace-temps. En 1908, Hermann Minkowski adopte un point de vue plus général et dégage la théorie de toute considération liée à des phénomènes physiques particuliers en considérant leurs structures. Dès lors, les principes d'invariance jouent un rôle crucial dans la recherche des lois régissant les phénomènes nouvellement découverts et en restreignent le cadre. En 1918, Emmy Noether associe à toute symétrie des lois, à laquelle obéit un système, une *loi de conservation*, qui affirme l'existence d'une grandeur physique dont la valeur reste constante au cours de l'évolution du système. Avec ces auteurs, la physique se tourne, pour approfondir sa compréhension, vers des notions moins directement visuelles que les formes mais de plus en plus conceptuelles : elle ouvre de nouvelles perspectives… ■

Pour en savoir plus : Bernard Maitte, *Histoire des cristaux,* Paris, éd. Hermann, 2014.

[16] Franz Ernst Neumann, *Mathematische Grundlagen de quantenmechanick,* Berlin, 1833.

[17] Nous dirions classe de symétrie.

[18] Pierre Curie et Jacques Curie, « Sur l'effet piézoélectrique », *Bull. de min.,* t. III, 1880, p. 90.

[19] Pierre Curie, « Sur la symétrie dans les phénomènes physiques… », *Journal de Physique,* 3ème série, Vol. III, p. 393-416.

[20] Jean-Marc Lévy-Leblond et Bernard Maitte, « Une manière de construire le monde », *TDC, Symétries*, n° 883, nov. 2004, p. 6-11.