Paradoxes

Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

* UMR CNRS 9189,
Bât. M3 extension

Par **Jean-Paul DELAHAYE**
Professeur émérite à l'Université de Lille, Sciences et Technologies,
Chercheur au Laboratoire CRISTAL *

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une solution au paradoxe proposé, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture ou à l'adresse électronique delahaye@univ-lille1.fr).

LE PARADOXE PRÉCÉDENT : S'APPROCHER DU BUT

Le problème m'a été indiqué par Aurélien Géron. Vous êtes placé en un point O et, à une distance d'une unité, il y a un point I. Vous devez vous rendre le plus près possible d'un point X sur le segment de droite OI (par exemple, à moins d'un millième d'unité de X), mais vous ne pouvez vous déplacer que par sauts successifs selon la règle simple suivante : vous choisissez le point O ou le point I, et votre saut vous conduit alors au point situé au milieu entre le point P, où vous êtes, et le point choisi. Si, par exemple, vous partez de O et choisissez la séquence I, O, I, I, cela vous mène successivement aux positions 0,5 – 0,25 – 0,625 – 0,8125.

Fixons maintenant un objectif X à atteindre à moins d'un millième (ou un millionième, etc.). Par exemple, X situé à $1/\pi$ de O. Quelle est la plus courte séquence de choix O ou I qui permet de réussir ?

Attention – et c'est là le côté paradoxal du problème – appliquer le principe naturel « si je suis entre O et X, je vais vers I, si je suis entre X et I, je vais vers O » ne marche pas du tout. Voici un exemple qui le prouve. Prenons l'objectif X = 0,6 et appliquons la méthode « si je suis entre O et X, je vais vers I, si je suis entre X et I, je vais vers O ». Les points obtenus sont en effet (on mesure leur distance à O) : 0.5 – 0.75 – 0.375 – 0.6875 – 0.34375 – 0.671875 – 0.3359375 – 0.66796875 – 0.333984375 – 0.6669921875 – 0.33349609375 – 0.666748046875... On constate que, rapidement, on oscille entre 1/3 et 2/3, il faut donc trouver autre chose.

Solution

Merci à Jef Van Staeyen, Éric Wegrzynowski, Clément Boulonne, Florent Cordellier, Louis Moreau de Saint Martin et Jean-François Colin qui m'ont envoyé la bonne réponse à cette énigme difficile.

Pour aller vers le point situé à X de O (X un nombre entre 0 et 1), voici comment procéder :

(a) on écrit X en base 2, X = 0,110101101 par exemple ;

(b) on lit les chiffres à l'envers, ce qui donne 1 0 1 1 0 1 0 1 1 ;

(c) on interprète les '0' par « aller vers O », et les '1' par « aller vers I ».

Ici, cela donne : vers I, vers O, vers I, vers I, vers O, vers I, vers O, vers I, vers I.
Le nombre $1/\pi$ s'écrit 0,0101000101 en base 2 au millième près car :
$1/\pi$ - (1/4 + 1/16 + 1/256 + 1/1024) = 0,000927073684

On en déduit que, pour s'en approcher à moins d'un millième, il faut choisir les mouvements suivants : vers I, vers O, vers I, vers O, vers O, vers O, vers I, vers O, vers I, vers O.

Démontrons que le procédé décrit fonctionne.

(A) Si je suis à X de O et que je vais vers O, je passe en X/2, ce qui revient à placer un 0 entre la virgule et les chiffres de X écrits en base 2 (0,11110101 devient par exemple 0,**0**11110101).
En effet, souvenez-vous qu'en base 10, diviser par 10 un nombre entre 0 et 1, c'est insérer un '0' juste après la virgule (0,237 : 10 = 0,0237) et que, de manière analogue, en base 2, diviser par 2, c'est insérer un '0' après la virgule.

(B) Si je suis en X, que je vais vers I, la distance à I qui était (1-X) devient (1-X)/2 et, donc, le point où j'arrive est à 1-(1-X)/2 de O. Or, ce nombre s'écrit en base 2 en plaçant un '1' entre la virgule et les chiffres de X écrits en base 2 (0,1011001 devient par exemple 0,**1**1011001).

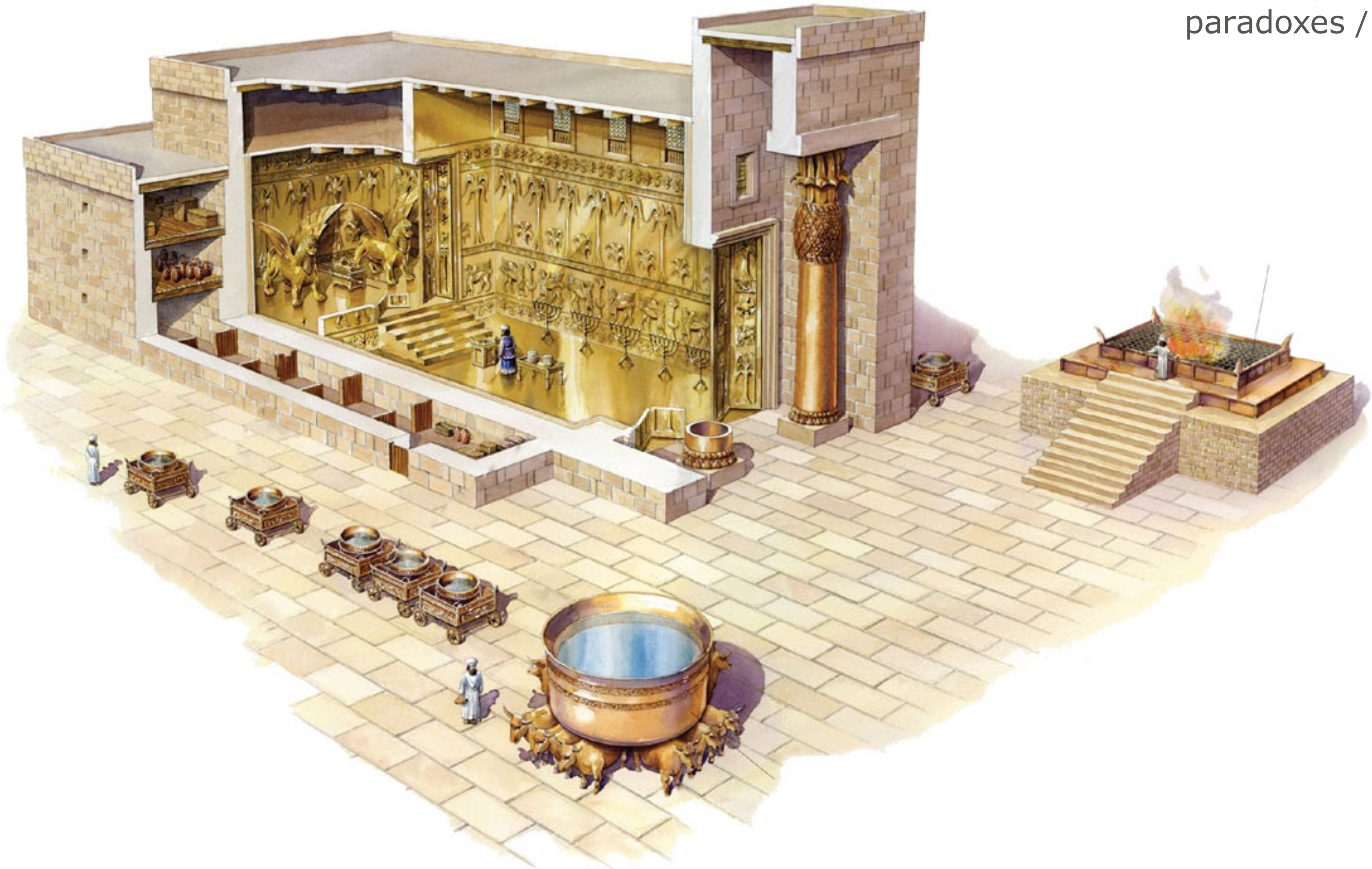
Cette dernière affirmation provient de ce que :

-i- l'opération y —> 1-y, pour y écrit en base 2, revient à changer les chiffres du développement binaire de y en remplaçant les '0' après la virgule par des '1' et les '1' après la virgule par des '0' (c'est ce qu'on nomme le passage au « complément » : 0,11110101 devient 0,00001010),

-ii- diviser par 2 revient à introduire un '0' entre la virgule et les chiffres du développement binaire comme on l'a déjà dit.

En composant « passage au complément », « insertion d'un 0 après la virgule » et « passage au complément » (ce qui correspond à X —> 1-(1-X)/2), on a réalisé simplement l'opération « insertion d'un 1 après la virgule ».

En résumé, si on calcule en base 2 :
- quand on va vers O, on insère un '0' après la virgule ;
- quand on va vers I, on insère un '1' après la virgule.
Examinons maintenant un exemple avec plusieurs déplace-



ments vers O ou vers I.

Si on part de O et qu'on va successivement vers I, vers I, vers O, vers O, vers I, vers O, vers I (ce qu'on peut noter IIOOIOI), on obtient successivement :

0,
0,1 insertion d'un 1 après la virgule
0,11 insertion d'un 1 après la virgule
0,011 insertion d'un 0 après la virgule
0,0011 insertion d'un 0 après la virgule
0,10011 insertion d'un 1 après la virgule
0,010011 insertion d'un 0 après la virgule
0,1010011 insertion d'un 1 après la virgule

Comme on le voit, le nombre obtenu a pour développement binaire ce qu'on obtient en inversant l'ordre des opérations « vers O » et « vers I » (et en assimilant les 'O' aux '0', et les 'I' aux '1')

Cela signifie que, pour aller vers un nombre X et s'en approcher avec une précision de $1/2^n$, il faut écrire X en base 2 jusqu'au n-ième chiffre après la virgule (ce qui donne par exemple x = 0,01011), puis lire à l'envers les chiffres obtenus pour savoir quelles opérations de saut exécuter.

Assez étrangement, pour s'approcher d'un point donné, il faut donc commencer par les derniers chiffres de la valeur approchée qu'on souhaite obtenir à la fin. C'est contre-intuitif car, le plus souvent (et en particulier pour se déplacer sur une carte vers un point précis), on procédera progressivement. On s'approche en gros du point visé (on va, par exemple, dans la capitale du pays du lieu qu'on cherche à approcher), puis on s'occupe plus finement du but (on va vers la grande ville la plus proche du but), puis encore plus finement (on va vers le village le plus proche du but), etc. Ici, paradoxalement, il faut procéder par une méthode inverse, et s'occuper en premier des plus petits détails !

NOUVEAU PARADOXE : π VAUT 3

Dans le Premier livre des Rois de la Bible (1R 7, 23), on trouve la description du Temple de Salomon et, en particulier, celle d'un bassin de bronze coulé par le fondeur Hiram :

[1 Rois 7, 23] Il fit la Mer en métal fondu, de dix coudées de bord à bord, à pourtour circulaire, de cinq coudées de hauteur ; un fil de 30 coudées en mesurait le tour (voir : http://www.cerbafaso.org/textes/bioethique/bible_de_jerusalem.pdf, page 283).

Si le périmètre P du bassin rond vaut 30 coudées et que son diamètre D mesure 10 coudées, c'est que $P/D = \pi = 3$.

Cela semble contredire la valeur aujourd'hui admise pour π, qui est 3,1415926... Certains prétendent même avoir calculé π avec une précision de 13 mille milliards de chiffres (record du 8 octobre 2014).

Heureusement, une preuve définitive que la Bible a raison vient d'être proposée par un mathématicien qui souhaite rester anonyme. La voici :

Posons $x = (\pi + 3)/2$, on a alors :

$$2x = \pi + 3 \Rightarrow 2x(\pi - 3) = (\pi + 3)(\pi - 3) \Rightarrow$$
$$2\pi x - 6x = \pi^2 - 9 \Rightarrow 9 - 6x = \pi^2 - 2\pi x \Rightarrow$$
$$9 - 6x + x^2 = \pi^2 - 2\pi x + x^2 \Rightarrow (3 - x)^2 = (\pi - x)^2 \Rightarrow$$
$$3 - x = \pi - x \Rightarrow \pi = 3.$$

Il est cependant étrange et même paradoxal que tant de mathématiciens se soient trompés en proposant une valeur différente de 3 pour π. Saurez-vous expliquer cette ennuyeuse situation ?

Remarque : si vous voulez en savoir plus sur la valeur de π trouvée dans la bible, consultez https://www.uwgb.edu/dutchs/pseudosc/pibible.htm