Paradoxes

Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

* UMR CNRS 8022,
Bât. M3 extension

Par **Jean-Paul DELAHAYE**
Professeur émérite à l'Université Lille 1,
Chercheur au Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille *

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une solution au paradoxe proposé, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

LE PARADOXE PRÉCÉDENT : 9 CHANCES SUR 10 DE GAGNER ET DE PERDRE

Il y a un banquier et des joueurs. Chaque joueur engage 100 €. S'il gagne, il récupère ses 100 €, plus 100 € que lui donne le banquier. S'il perd, le banquier garde les 100 € engagés par le joueur. Le banquier utilise un dé équitable à 10 faces. Le banquier constitue des groupes de joueurs de la façon suivante : le **groupe 1** est composé de 10 joueurs numérotés de 1 à 10. Le joueur 1 gagne toujours. **Le groupe 2** comporte 90 joueurs numérotés de 11 à 100. Le **groupe 3** comporte 900 joueurs numérotés de 101 à 1000. Etc. Il n'est pas nécessaire que les groupes soient constitués à l'avance.

Le banquier jette le dé à 10 faces.

Si le résultat est un 10, les joueurs 2, 3, ..., 10 du **groupe 1** ont perdu, et la partie est terminée pour tout le monde. Dans un tel cas, 9 joueurs ont perdu et 1 joueur (le numéro 1) a gagné.
Sinon – si le résultat du dé est 1, 2, 3, ..., ou 9 au premier lancer – les 10 joueurs du **groupe 1** ont gagné, et le banquier jette le dé une deuxième fois. Si le résultat du second lancer est 10, les 90 joueurs du **groupe 2** ont perdu et la partie est terminée pour tout le monde. Dans un tel cas, 90 joueurs ont perdu (ceux dont les numéros sont 11, 12, ..., 100) et 10 joueurs ont gagné.
Sinon – si le résultat du second lancer est 1, 2, ..., ou 9 – les 90 joueurs du **groupe 2** ont gagné, et le banquier jette le dé une troisième fois. Si le résultat de ce troisième lancer est 10, les 900 joueurs du **groupe 3** ont perdu et la partie est terminée. Dans un tel cas, en tout 900 joueurs ont perdu et 100 = 10 + 90 joueurs ont gagné.
Etc. Le jeu se prolonge jusqu'à ce qu'un 10 tombe.

Quel que soit le moment de l'arrêt, quand la partie se termine, 9 joueurs sur 10 exactement ont perdu, et 1 sur 10 a gagné. Chaque partie du jeu « 9 sur 10 » est finie (car la probabilité pour qu'on ne tombe jamais sur un 10 est nulle).
Le banquier cherche des joueurs. Il vous demande si vous acceptez de jouer (sans vous indiquer le numéro que vous aurez). Voilà deux raisonnements possibles.

Raisonnement 1. Je vais risquer 100 €, on va jeter le dé. La probabilité pour que je perde est de 1/10 puisque seul le 10 me fait perdre (c'est même un peu moins puisque le joueur de numéro 1 est certain de gagner). Ayant donc plus de 9 chances sur 10 de gagner, j'accepte.

Raisonnement 2. Parmi tous les gens à qui le banquier propose le jeu et qui participeront au jeu, quelle que soit la durée de la partie, il y a exactement 9 joueurs sur 10 qui perdent. Si j'accepte de jouer, je serai un joueur quelconque en rien différent des autres, à qui le banquier a proposé le jeu. Comme 9 joueurs sur 10 perdent, j'ai 9 chances sur 10 de perdre. Donc, je refuse.

Qu'en penser : 9 chances sur 10 de gagner ou 9 chances sur 10 de perdre ?

Solution

Merci à Jef Van Staeyen, Léo Gerville-Réache et Jean-Pierre Bondue qui m'ont fait parvenir des analyses de ce beau mais délicat paradoxe.

Le jeu, tel qu'il est proposé, n'est pas raisonnable car les ressources disponibles dans le monde sont finies ! Dans le cas d'une longue série de tirages différents de 10, le nombre de participants et les sommes à verser par le banquier dépasseront tout ce qu'il est raisonnablement possible d'envisager. Il faut rendre le jeu réaliste, et expliquer ce qu'on fait quand les bornes – nombre maximum de joueurs envisageables, fortune réelle que le banquier accepte de mettre en jeu – sont atteintes. Nous allons voir qu'un protocole fini, construit sur le schéma initial de l'histoire, fait disparaître tout paradoxe.

Un banquier honnête – c'est-à-dire qui ne propose aux joueurs que des paris qu'il pourra payer – évaluera combien de groupes de joueurs il peut payer si tout se passe mal pour lui. Une fois ce nombre (qui dépend de sa fortune) connu, le banquier cherchera à réunir les joueurs dont il peut avoir besoin. S'il y arrive, il leur attribuera des numéros en procédant au hasard pour que les joueurs soient tous traités sur un pied d'égalité. Le jeu sera alors lancé, et on fera rouler le dé autant de fois que nécessaire. Si le 10 tombe assez vite, le jeu s'arrêtera, mais si le 10 ne tombe pas assez rapidement, le jeu s'arrêtera aussi, dès que le banquier aura distribué tout son argent.

Avec ce protocole fini, tout joueur qui participe à un paquet possède 9 chances sur 10 de gagner, ce qui, pour une mise M, correspond à une espérance de gain de :

$$-M/10 + 9M/10 = 0{,}8\ M$$

Un joueur aura donc intérêt à accepter de jouer.
Notons, avant de faire le calcul en adoptant le point de vue du banquier, que, comme tous les joueurs ne participent pas à chaque série de lancers, l'espérance de gain d'un joueur ayant accepté de jouer (mais pas certain de participer à un tirage si la partie s'interrompt avant que son numéro ne soit concerné) sera un peu inférieure à 0,8 M.

Adoptons maintenant le point de vue du banquier et en supposant qu'il accepte de perdre jusqu'à 100 fois la mise M.

Espérance de gain du banquier honnête disposant de 100 fois la mise

(a) Une fois sur 10 (partie [10]), le banquier gagne 8 fois la mise M (le joueur 1 a gagné, mais les 9 autres ont perdu),

(b) 9 fois sur 100 (partie [non 10, 10]), il gagne 80 fois la mise (les joueurs de 1 à 10 ont gagné, et ceux de 11 à 100 ont perdu),

(c) 81 fois sur 100 (partie [non 10, non 10]), il perd 100 fois la mise M (les 100 joueurs engagés ont gagné, et le banquier ruiné arrête le jeu).

Au total, l'espérance de gain du banquier est donc de :

$$(1/10)8M + (9/100).80M + (81/100).(-100M) = -73\ M$$

Puisque les 100 joueurs sont dans une position équivalente, l'espérance de gain d'un joueur est très précisément 0,73 M. Comme prévu avant le calcul, cette espérance est un peu inférieure à 0,8 M.

Menons le calcul dans le cas général, c'est-à-dire avec un entier n quelconque supérieur à 1.

Espérance de gain du banquier honnête disposant de 10^n fois la mise

On tombe sur la formule suivante pour l'espérance du gain du banquier :

$$(1/10).8.M + (1/10)\ (9/10)\ 8\ 10M + (1/10)\ (9/10)^2\ 8\ 10^2\ M + \ldots$$
$$+ (1/10)\ (9/10)^{n-1}\ 8.\ 10^{n-1}\ M\ \ + (9/10)^n\ 10^n\ (-M)$$
$$= (1/10).8.M.(1 + 9 + 9^2 + \ldots + 9^{n-1}\ - (10/8)\ 9^n)$$
$$= (M/10).(9^n - 1 - 10.9^n) = -(M/10)(\ 9^{n+1} + 1)$$

Pour $n = 2$ on retrouve

$$-(M/10)(\ 9^{2+1} + 1) = -(M/10)(\ 729 + 1) = -73\ M$$

Cette espérance est très négative pour le banquier ! Ceci n'est pas étonnant car le banquier gagne souvent, mais quand il perd, il perd énormément. En fait, le banquier joue une sorte de *montante de d'Alembert* (la martingale, qui consiste à doubler sa mise au casino tant qu'on n'a pas gagné*)*. Ici, il ne double pas sa mise à chaque fois, mais il la multiplie par 9. Il gagne souvent mais, quand il perd, ce qu'il perd est tellement énorme que cela efface tous ses gains et, en moyenne, finalement il perd !

Ceci confirme que si le jeu est rendu fini et que le banquier est honnête, alors il faut accepter de jouer. Le bon raisonnement est celui qui dit « si la partie se déroule de telle façon qu'à un moment je participe à un paquet de joueurs concernés par un lancer de dé, j'aurai alors 9 chances sur 10 de gagner ». Parmi les deux raisonnements proposés dans l'énoncé du paradoxe, le raisonnement 1 résiste à la transformation finie du protocole non borné de l'énoncé initial.

Bibliographie :

Le « Shooting room paradox » est assez proche du paradoxe présenté ici.

Voir :

- William Eckhardt, *A Shooting-Room View of Doomsday,* The Journal of Philosophy, 94, 5, 244-259, 1997.
- John Leslie, *The End of the World : The Science and Ethics of Human Extinction,* Routledge, 1998.

NOUVEAU PARADOXE : RÉDUCTIONS

Jacques a gagné un bon de réduction qui lui donne droit à 22 % sur tous les articles du magasin de téléphone où il se rend pour acheter un nouvel appareil. Aujourd'hui, c'est l'anniversaire du magasin et celui-ci offre une réduction de 9 % sur tous les téléphones. La réduction est cumulable avec les autres réductions dont peuvent bénéficier les clients. Le magasin donne le choix de l'ordre dans lequel appliquer les réductions.
Jacques peut donc demander d'abord une réduction de 22 %, puis une réduction de 9 %, ou procéder dans l'ordre inverse : demander d'abord 9 %, puis 22 %. Son vieux téléphone est en panne, il ne peut donc pas faire le calcul et doit raisonner de tête. Il hésite car deux arguments se présentent à son esprit :
- Si je profite d'abord des 22 %, je profite des 22 % sur un prix plus élevé qu'en demandant les 22 % en second, donc il faut commencer par les 22 %,
- Il faut commencer par les 9 %. Cela résulte du principe général suivant : lorsqu'on doit opérer une série de réductions, pour en profiter au mieux, il faut opérer les réductions par ordre croissant (car cela fait baisser le prix plus lentement et donc, en moyenne, les baisses s'appliquent à des sommes plus élevées et sont donc plus intéressantes).
Voilà qui est paradoxal, se dit-il ! Sans faire le calcul (ce serait trop facile !), aidez-le.

Existe-t-il un principe général qui permet de profiter au mieux d'une série de réductions sans avoir à faire de calcul ? ■